



فكر في الرياضيات

ملف مفاتيح

الإحصاء

إعداد الأستاذ

أحمد عرفات



D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

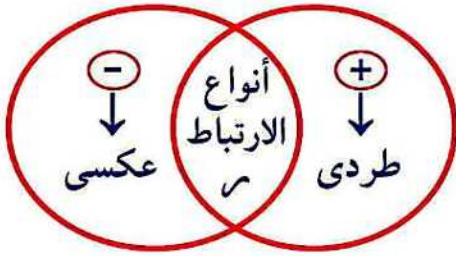
مفاتيح الإحصاء

(ملخص لأهم نقاط المقرر في الإحصاء)

- ١ معامل الارتباط (r).
- ٢ معامل ارتباط بيرسون (r).
- ٣ معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.
- ٤ شكل الانتشار والارتباط وخط الانحدار.
- ٥ معادلة خط الانحدار.
- ٦ المدى - الوسط الحسابي - المنوال - الوسيط.
- ٧ تمثيل البيانات بالساق والأوراق.
- ٨ التمثيل المزدوج بالساق والأوراق.
- ٩ الرباعيات.
- ١٠ تعيين الرباعيات من البيانات المفردة.
- ١١ تعيين الرباعيات من الجدول التكراري.
- ١٢ الاحتمال.
- ١٣ مسلمات وقوانين الاحتمال.
- ١٤ الاحتمال الشرطي.
- ١٥ الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
- ١٦ المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية.
- ١٧ التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين.
- ١٨ المتغير العشوائي المتصل.
- ١٩ المتغير العشوائي الطبيعي.
- ٢٠ التوزيع الطبيعي المعياري.
- ٢١ قواعد استخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري.
- ٢٢ حساب الاحتمال لمتغير طبيعي غير معياري.
- ٢٣ التقدير الإحصائي وفترات الثقة.
- ٢٤ الخطأ في التقدير.
- ٢٥ خطوات إيجاد فترة الثقة.

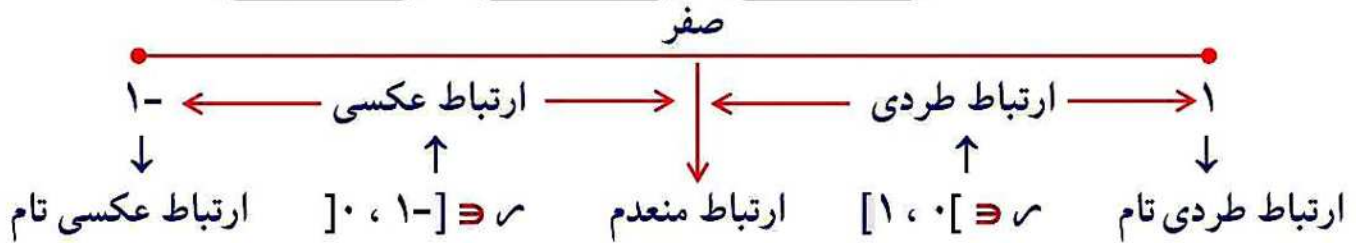
① **معامل الارتباط** : هو مقياس كمي نسبي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين .

❖ **خصائص معامل الارتباط** :



(١) r تكون موجبة في حالة الارتباط الطردي .

r تكون سالبة في حالة الارتباط العكسي .



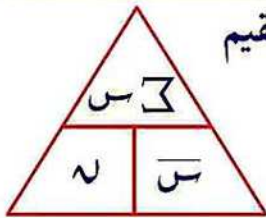
(ج) $r ∈ [-1, 1]$ أي أن : $-1 ≤ r ≤ 1$

درجة الارتباط	قيمة معامل الارتباط	
ارتباط ضعيف	$0 < r < 0,4$	(١)
ارتباط متوسط	$0,4 ≤ r ≤ 0,6$	(٢)
ارتباط قوى	$0,6 < r < 1$	(٣)

② **معامل ارتباط بيرسون (r) أو (معامل الارتباط الخطي) :**

إذا كان : s ، v متغيرين لهما عدد (n) من القيم ... فإن :

$$r = \frac{\sum s \sum v - \sum s \sum v}{\sqrt{(\sum s^2 - \frac{(\sum s)^2}{n}) (\sum v^2 - \frac{(\sum v)^2}{n})}}$$



حيث : $\sum s$ هي مجموع القيم ، $\bar{s}$ الوسط الحسابي ، n عدد القيم
إذا كان : $\bar{s}$ ، $\bar{v}$ هما المتوسطان لقيم s ، v على الترتيب

، n عدد القيم ، فإن : $\frac{\sum s}{n} = \bar{s}$ ، $\frac{\sum v}{n} = \bar{v}$

∴ مجموع القيم : $\sum s = \bar{s} \times n$ (الوسط الحسابي $\times$ عدد القيم)

٣ معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

إذا كان : س ، ص متغيرين لهما عدد (ن) من القيم ،

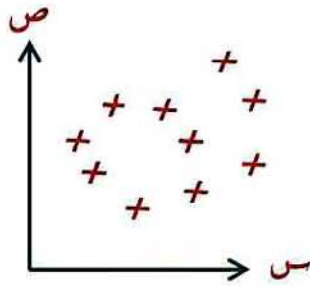
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} - 1$$

فإن :

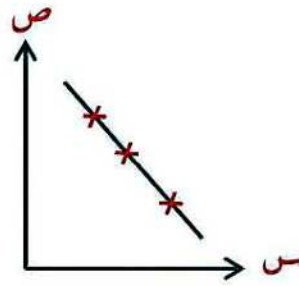
٤ شكل الانتشار والارتباط وخط الانحدار :

٥ خط الانحدار : هو خط مستقيم تقع النقط من حوله وقريبة منه ، وإن كانت لا تقع جميعها عليها .

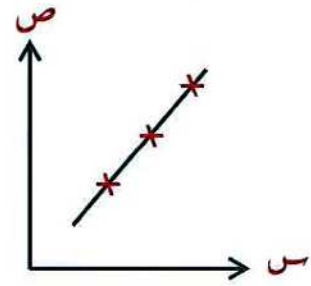
عند دراسة العلاقة بين المتغيرين س ، ص وتمثيل الأزواج المرتبة (س، ص) بعدد من النقط في المستوي الديكارتي فنحصل على شكل يسمى (شكل الانتشار) وهو أحد الأشكال التالية:



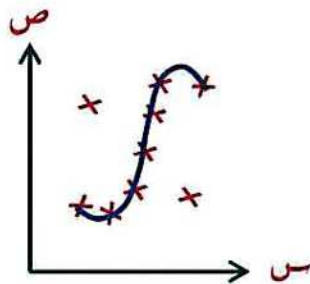
ارتباط منعدم



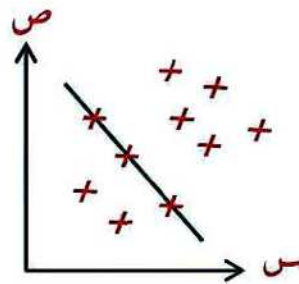
ارتباط عكسي تام



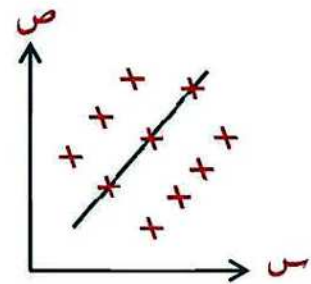
ارتباط طردي تام



ارتباط غير خطي



ارتباط عكسي غير تام



ارتباط طردي غير تام

ملاحظات :

- (١) العلاقة بين طول ضلع المربع ومحيطه هي ارتباط (طردي تام) .
- (٢) العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته تُعطى (علاقة غير خطية) .
- (٣) العلاقة بين محيط الدائرة وطول نصف قطرها هي ارتباط (طردي تام) .

٥ معادلة خط الانحدار :

إذا كان : ص هو المتغير التابع ، س هو المتغير المستقل ،
فإن : معادلة خط الانحدار ص على س هي :

(ص تقرأ ص هات)

$$\widehat{ص} = ٢ + ٤ س$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (ص_i - \widehat{ص}_i)^2}{n} = ٢$$

$$ب = \frac{\sum_{i=1}^n (ص_i - \widehat{ص}_i) \times \sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})}{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2}$$

(٢) طول الجزء المقطوع من
محور الصادات

حيث (ب) معامل انحدار ص على س
هي تعبر عن ميل خط الانحدار
على الاتجاه الموجب لمحور السينات .

ملاحظات :

- (١) نستخدم معادلة خط انحدار ص على س في التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س .
- (٢) تحديد مقدار الخطأ يتحدد من العلاقة :
مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |
- (٣) إشارة معامل الانحدار (ب) تدل على نوع الارتباط :
فمثلاً إذا كانت : (ب) موجبة (+) فإن الارتباط يكون طردياً .
وإذا كانت : (ب) سالبة (-) فإن الارتباط يكون عكسياً .

٦ (المدى - الوسط الحسابي - المنوال - الوسيط) :

- ① المدى لمجموعة من القيم = القيمة العظمى - القيمة الصغرى
ويعتبر المدى هو أبسط مقاييس التشتت .
- ② (الوسط الحسابي - المنوال - الوسيط) من مقاييس النزعة المركزية .
- ③ الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$
- ④ المنوال : هو القيمة الأكثر تكراراً في المجموعة .

- ٥ (الوسيط لمجموعة من القيم) : فكرتين (بعد ترتيب القيمة تصاعدياً أو تنازلياً) ، فإذا كان :
 ٢ عدد القيم (٧) فردياً ، فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في المنتصف تماماً.
 ٣ عدد القيم (٧) زوجياً ، فإن الوسيط = مجموع القيمتين اللتين في المنتصف ÷ ٢
 أى : متوسط القيمتين في المنتصف

♦ مثال :

القيم	الوسيط الحسابي	الوسيط	المنوال
٧، ٧، ٧، ٩، ٥	$\frac{٧+٧+٧+٩+٥}{٥}$ $٧ = \frac{٣٥}{٥} =$	الترتيب التصاعدي : ٩، ٧، ٧، ٧، ٥ ∴ الوسيط = ٧	٧
١٢، ٧، ٦، ٩، ٨، ٦	$\frac{١٢+٧+٦+٩+٨+٦}{٦}$ $٨ = \frac{٤٨}{٦} =$	الترتيب التصاعدي : ١٢، ٩، ٨، ٧، ٦، ٦ ∴ الوسيط = $\frac{٧+٨}{٢} = ٧,٥$	٦

٧ تمثيل البيانات بالساق والأوراق :

الفكرة (٢)	الفكرة (١)
إذا كان أحد البيانات (١٢، ٥) الجزء العشري (الأوراق) الباقي الساق $\begin{array}{c c} \text{الأوراق} & \text{الساق} \\ \hline ٥ & ١٢ \end{array}$ المفتاح : $١٢,٥ = ١٢ / ٥$	إذا كان أحد البيانات (١٢، ٥) الآحاد الباقي الساق $\begin{array}{c c} \text{الأوراق} & \text{الساق} \\ \hline ٥ & ١٢ \end{array}$ المفتاح : $١٢٥ = ١٢ / ٥$
المفتاح : الورقة / الساق = الورق الساق $١٢,٥ = ١٢ / ٥$	المفتاح : الورقة / شرطة الساق = الورق الساق $١٢٥ = ١٢ / ٥$

ملاحظة : مثل العدد ٧ بالساق الأوراق .

الفكرة (٢)
المفتاح : أجزاء عشرية
 $١٢,٥ = ١٢ / ٥$

$$\begin{array}{c|c} \text{الأوراق} & \text{الساق} \\ \hline \text{صفر} & ٧ \end{array}$$

الفكرة (١)
المفتاح : أرقام
 $١٢٥ = ١٢ / ٥$

$$\begin{array}{c|c} \text{الأوراق} & \text{الساق} \\ \hline ٧ & \text{صفر} \end{array}$$

♦ مثال : مثل البيانات الآتية بالساق والأوراق :

(٢) ١٨,٧ ، ١٧,٨ ، ١٦,٨ ، ١٦,٩

الترتيب : ١٦,٨ ، ١٦,٩ ، ١٧,٨ ، ١٨,٧

الساق يبدأ من ١٦ ← ١٨

الأوراق	الساق
٨ ٩	١٦
٨	١٧
٧	١٨

المفتاح : ١٧,٨ = ١٧ / ٨

أكبر عدد ، أقل عدد

١٨,٧ ١٦,٨

(١) ١٨٧ ، ١٧٨ ، ١٦٨ ، ١٦٩

الترتيب : ١٦٨ ، ١٦٩ ، ١٧٨ ، ١٨٧

الساق يبدأ من ١٦ ← ١٨

الأوراق	الساق
٨ ٩	١٦
٨	١٧
٧	١٨

المفتاح : ١٧٨ = ١٧ / ٨

أكبر عدد ، أقل عدد

١٨٧ ١٦٨

♦ مثال : من التمثيل التالي أكمل ما يأتي :

(٢) الأوراق الساق

٢٣	٤	٥	٦
٢٤	٤	٧	٩
٢٥	٠	٤	٨ ٨
٢٦	٣	٨	٩
٢٧	١	٢	٥

المفتاح : ٢٤,٧ = ٢٤ / ٧

(١) أقل عدد هو ٢٣٤.....

(٢) أكبر عدد هو ٢٧٥.....

(٣) المدى = ٢٣٤ - ٢٧٥ = ٤١

(٤) الوسيط : ١ عدد القيم = ١٦ (زوجي)

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{١٦}{٢}$ ، $١ + \frac{١٦}{٢}$

الثامن و التاسع

(٣) قيمة الوسيط = $\frac{٢٥٨ + ٢٥٤}{٢} = ٢٥٦$

(١) الأوراق الساق

٢٣	٤	٥
٢٤	٤	٧ ٩
٢٥	٠	٤ ٨ ٨
٢٦	٣	٨ ٩
٢٧	١	٢ ٥

المفتاح : ٢٤,٧ = ٢٤ / ٧

(١) أقل عدد هو ٢٣,٤.....

(٢) أكبر عدد هو ٢٧,٥.....

(٣) المدى = ٢٣,٤ - ٢٧,٥ = ٤,١

(٤) الوسيط : ١ عدد القيم = ١٥ (فردى)

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{١٥ + ١}{٢} = ٨$ الثامن

(٣) قيمة الوسيط هو العنصر الثامن : ٢٥,٨

٨ التمثيل المزدوج بالساق والأوراق .

درجات أحمد

٢٧	٢٦	٣٠	٢٥
٢٦	٣٦	٤١	٣٠

أقل درجة : ٢٥

أعلى درجة : ٤١

الساق من : ٢ $\leftarrow$ ٤

درجات عرفات

٢٢	٢٢	٢٥	١٧
١٨	٢٢	٣٢	٢٤

أقل درجة : ١٧

أعلى درجة : ٣٢

الساق من : ١ $\leftarrow$ ٣

درجات أحمد	الساق	درجات عرفات
٧	١	٧
٦	٢	٢
٦	٣	٢
١	٤	٢
٥		٥

المفتاح

$$٢٤ = ٢ / ٤ \leftarrow \Rightarrow ٢ / ٥ = ٢٥$$

أو : المفتاح ٥ / ٢ / ٤ تعني ٢٥ درجة أحمد ، ٢٤ درجة عرفات

٩ الرباعيات : تقسم البيانات أربعة أقسام متساوية

بعد ترتيب البيانات ترتيباً (تصاعدياً) أو (تنازلياً) ... فائدتها توضح مدى توزيع البيانات .

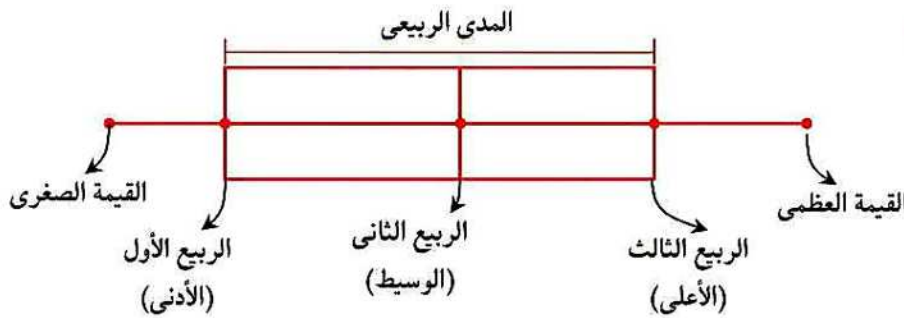
(١٢)	(٢٢)	(٣٢)
الربع الأول أو الربع الأدنى	الربع الثاني (الوسيط)	الربع الثالث أو الربع الأعلى
هو القيمة التي يسبقها ٢٥% من البيانات . ويليها ٧٥% من البيانات	هو القيمة التي قبلها نصف البيانات ويليها النصف الآخر .	هو القيمة التي يسبقها ٧٥% من البيانات . ويليها ٢٥% من البيانات

١٥ **تعيين الرباعيات من البيانات المفردة :** إذا كان (عدد البيانات n)

ترتيب الربع الأول (الربع الأدنى)	ترتيب الربع الثاني (الوسيط)	ترتيب الربع الثالث (الربع الأعلى)
$(١,٣) = \frac{1}{4}(١ + n)$	$(٢,٣) = \frac{1}{2}(١ + n)$	$(٣,٣) = \frac{3}{4}(١ + n)$
أو : $\frac{(١+n)}{4}$	أو : $\frac{(١+n)}{2}$	أو : $\frac{(١+n)3}{4}$

يوجد حالتان حيث عدد البيانات (n)

الحالة الأولى	الحالة الثانية
إذا كان : ($١ + n$) يقبل على ٤ فإن : الرباعيات تكون إحدى قيم البيانات . قيمة الربع المطلوب	إذا كان : ($١ + n$) لا يقبل على ٤ فإن : الرباعيات ليست إحدى قيم البيانات . قيمة الربع المطلوب
= قيمة العنصر الذي ترتيبه هذا الربع = القيمة الصغرى + (الفرق بين القيمتين) × (الجزء العشري بترتيب الربع)	

* **التمثيل الصندوقى :**

• من مقاييس التشتت (المدى - التباين - الانحراف المعياري) .

• نصف المدى الربيعى = $\frac{٣٣ - ١٣}{2}$ (الانحراف الربيعى ، مقياس جديد للتشتت)♦ **مثال :** أوجد الرباعيات الثلاث للقيم :

(١) ٩٣ ، ٨٠ ، ٧٨ ، ٧٥ ، ٧٢ ، ٧١ ، ٦٠

الحل : الخطوة الأولى : الترتيب : ٦٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٥ ، ٧٨ ، ٨٠ ، ٩٣عدداهم = ٧ ، ($١ + n$) يقبل على ٤

∴ الرباعيات تكون إحدى قيم البيانات .

ترتيب الربع الثالث

$$٦ = \frac{٨ \times ٣}{٤} = \frac{(١+٧)٣}{٤} = (٣٣)$$

قيمة العنصر السادس = ٨٠

ترتيب الربع الثاني

$$٤ = \frac{٨}{٢} = \frac{(١+٧)}{٢} = (٣٣)$$

قيمة العنصر الرابع = ٧٥

ترتيب الربع الأول

$$٢ = \frac{٨}{٤} = \frac{(١+٧)}{٤} = (٣٣)$$

قيمة العنصر الثاني = ٧١

(٢) ١٢ ، ١٣ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣١ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٣١ ، ٢٢

الحل: الخطوة الأولى : الترتيب التصاعدي : عدد القيم = ١٠ (عددهم + ١) لا يقبل على ٤

١٢ ، ١٣ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٣١ ، ٣١

ترتيب الربع الثالث

$$٨,٢٥ = \frac{١١ \times ٣}{٤} = \frac{(١+٧)٣}{٤} = ٣٣$$

ترتيب الربع الثاني

$$٥,٥ = \frac{١١}{٢} = \frac{(١+٧)}{٢} = ٣٣$$

ترتيب الربع الأول

$$٢,٧٥ = \frac{١١}{٤} = \frac{(١+٧)}{٤} = ٣٣$$

• قيمة الربع الأول = ١٣ + ٧ × ٠,٧٥ = ١٨,٢٥

• قيمة الربع الثاني = ٢٢ + ٢ × ٠,٥ = ٢٣

• قيمة الربع الثالث = ٢٥ + ٦ × ٠,٢٥ = ٢٦,٥

١١ تعيين الرباعيات من الجدول التكراري : ذو المجموعات**أولاً : الطريقة الجبرية :**

• الخطوة (١) : ننشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

• الخطوة (٢) : نعين رُتب الرباعيات كما يلي :

رتبة الربع الأول = $\frac{٧}{٤}$ ، رتبة الربع الثاني = $\frac{٧}{٢}$ ، رتبة الربع الثالث = $\frac{٧٣}{٤}$ ،

• الخطوة (٣) : نحدد الفئة (الفترة) التي يقع فيها الربع المطلوب ونحدد منها

بداية الفترة الربعية ، طول الفترة ، التكرار المناظر لها ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لها

• الخطوة (٤) : نستخدم القانون التالي :

قيمة الربع المطلوب = بداية الفترة + $\frac{\text{رتبة الربع} - \text{التكرار المتجمع الصاعد لها}}{\text{التكرار المناظر لها}} \times \text{طول الفترة}$

♦ مثال: أوجد الرباعيات الثلاثة جبريًا .

الفترة	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢	-٢٤	-٢٦	-٢٨	المجموع
التكرار	٤	٧	١٠	١٨	٩	٧	٥	٦٠

الحل: نكوّن الجدول التكرارى

المتجمع الصاعد المقابل :

$$(١) \text{ رتبة الربع الأول } (١٨) = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$$

، تقع بين ١١ ، ٢١

، بداية الفترة الربعية = ٢٠

، التكرار المناظر = ١٠

، التكرار المتجمع الصاعد لها = ١١

، طول الفترة = ٢

$$\therefore \text{قيمة } ١٨ = ٢٠ + ٢ \times \frac{١١ - ١٥}{١} = ٢٠,٨$$

$$(٢) \text{ رتبة الربع الثانى } (٢٨) = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$$

، تقع بين ٢١ ، ٣٩

$$\therefore \text{قيمة } ٢٨ = ٢٢ + ٢ \times \frac{٢١ - ٣٠}{١٨} = ٢٣$$

$$(٣) \text{ رتبة الربع الثالث } (٢٨) = \frac{٦٠ \times ٣}{٤} = ٤٥$$

، تقع بين ٣٩ ، ٤٨

$$\therefore \text{قيمة } ٣٨ = ٢٤ + ٢ \times \frac{٣٩ - ٤٥}{٩} = ٢٥,٣$$

ثانيًا: الطريقة البيانية:

• الخطوة (١): نُعين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد .

• الخطوة (٢): نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد .

• الخطوة (٣): نعين ترتيبات الرباعيات $(\frac{٣}{٤}, \frac{١}{٢}, \frac{١}{٤})$ وتحديدتها على المحور الرأسى

• الخطوة (٤): عند كل ترتيب من ترتيبات الرباعيات نرسم خط أفقى يقطع المنحنى المتجمع الصاعد فى نقطة فيكون قيمة الربع هى مسقط هذه النقط على المحور الأفقى.

♦ مثال: أوجد الرباعيات الثلاثة بيانياً .

الفترة	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢	-٢٤	-٢٦	-٢٨	المجموع
التكرار	٤	٧	١٠	١٨	٩	٧	٥	٦٠

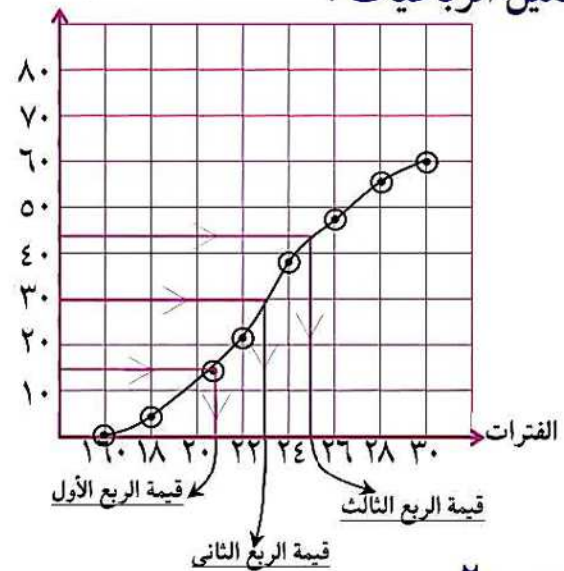
الحل:

(١) نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد
كما في الشكل المقابل .

(٢) نرسم المنحنى .

(٣) نعين الرباعيات .

التكرار المتجمع الصاعد



$$\therefore n = 200$$

$$\therefore \text{قيمة } (١٨) \approx 20,8$$

$$\therefore \text{قيمة } (٢٢) \approx 23$$

$$\therefore \text{قيمة } (٢٦) \approx 25,4$$

$$\text{رتبة الربع الأول } (١٨) = \frac{60}{4} = 15$$

$$\text{رتبة الربع الثاني } (٢٢) = \frac{60}{2} = 30$$

$$\text{رتبة الربع الثالث } (٢٦) = \frac{60 \times 3}{4} = 45$$

١٢ الاحتمال:

هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لا نستطيع أن نحدد أيّاً من هذه النواتج سوف يتحقق فعلاً عند إجراء التجربة .

هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما، ويكون رمزها (ف) .

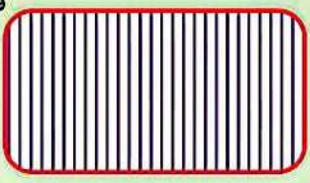
التجربة العشوائية

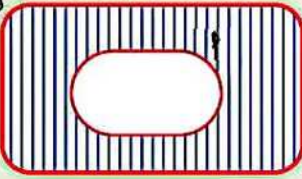
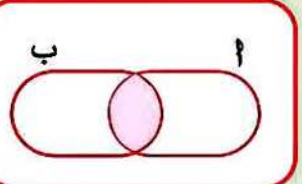
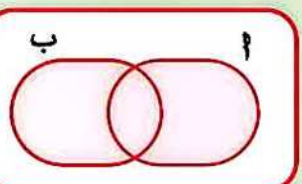
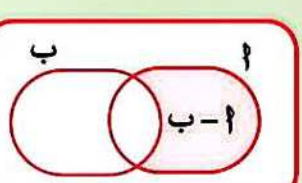
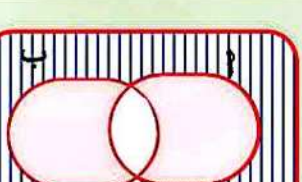
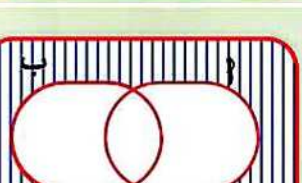
فضاء العينة

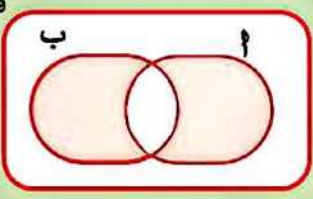
الحدث	هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة .
وقوع الحدث	يقال أن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية هو أحد عناصر المجموعة التى يتألف منها هذا الحدث .
الحدث المؤكد (ف)	هو حدث لابد أن يقع عند إجراء التجربة .
الحدث المستحيل ($\emptyset$)	هو حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية .
الحدث البسيط (الأولى)	هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى على عنصر واحد فقط .
الحدثان المتنافيان	يقال أن الحدثين A ، B من فضاء العينة (ف) متنافيان "إذا وفقط" إذا كان $A \cap B = \emptyset$
A ، B	هو حدث عدم وقوع A ، ويعبر عنه : $A \cap B = \emptyset$ ، $A \cup B = F$
الحدث المكمل (A^c)	

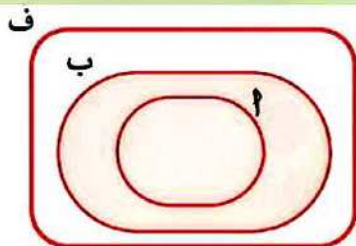
١٣ مسلمات وقوانين الاحتمال :

- لكل حدث ($A \subset F$) يكون احتمال أى حدث لا يزيد عن ١ ، ولا يقل عن صفر .
ونعبر عنها رياضياً : $(0 \leq P(A) \leq 1)$ أى أن : $P(A) \in [0, 1]$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كان : A ، B حدثين متنافيين من فضاء العينة ، فإن : $A \cap B = \emptyset$
 $P(A \cap B) = 0$ ، $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

تمثيل الحدث بشكل فن	التعبير عنه لفظياً	احتمال الحدث	
ف 	احتمال الحدث المؤكد = ١	$P(F) = 1$	١
ف 	احتمال الحدث المستحيل = صفر	$P(\emptyset) = 0$	٢
ف 	احتمال الحدث A : نسبة	$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{العدد الكلى}}$	٣

تمثيل الحدث بشكل فن	التعبير عنه لفظياً	احتمال الحدث	
ف 	احتمال الحدث المكمل للحدث $\bar{A}$ احتمال عدم وقوع الحدث $\bar{A}$ الشرطة (تعني) عدم	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $1 = P(A) + P(\bar{A})$	٤
ف 	احتمال وقوع A و B معاً	التقاطع: $P(A \cap B)$	٥
ف 	احتمال وقوع A أو B أو كليهما احتمال وقوع أحدهما على الأقل احتمال وقوع أى من الحدثين	الاتحاد: $P(A \cup B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	٦
ف 	احتمال وقوع A وعدم وقوع B أو: احتمال وقوع A فقط الشرطة (تعني) عدم	الفرق: $P(A - B)$ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ $P(A - B) = P(A \cap \bar{B})$	٧
ف 	احتمال عدم وقوع الحدثين معاً. احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.	$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$	٨
ف 	احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. احتمال عدم وقوع A وعدم وقوع B .	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{B})$	٩
ف 	احتمال عدم وقوع A أو وقوع B احتمال عدم وقوع A فقط ظل كل ما عدا $(A - B)$	$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(A \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(A \cap \bar{B})$	١٠

تمثيل الحدث بشكل ثن	التعبير عنه لفظياً	احتمال الحدث	
ف 	احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر . احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	$L[(A - B) \cup (B - A)]$ تساوى $L(A \cup B) - L(A \cap B)$	١١



ملاحظة: إذا كان: $A \supset B$ كما في شكل ثن المقابل:

فإن: (١) $L(A \cap B) = L(B)$

(٢) $L(A \cup B) = L(A)$

(٣) $L(A - B) = L(\emptyset) = \text{صفر}$

(٤) $L(A - B) = L(A) - L(B)$

$L(A) - L(B) = L(A - B)$

ملاحظات:

(١) إذا كان: $L(A) = L(\bar{A})$ ، فإن: $L(A) = \frac{1}{2}$

(٢) إذا كان: $L(A) \cup L(B) = L(\bar{A})$ ، فإن: $L(A) = \frac{2}{n+2}$

(٣) إذا كان: $L(A) \cup L(B) = L(\bar{A})$ ، فإن: $L(A) = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$

(٤) إذا كان: $L(A) = \frac{5}{3} = \frac{L(A)}{L(\bar{A})}$ ، فإن: $L(A) = \frac{5}{8}$

١٤ الاحتمال الشرطي:

هو احتمال وقوع الحدث (A) بشرط أن أو علمًا بأن أو إذا كان الحدث (B) وقع بالفعل .

ويعبر عنه ب: $L(A/B)$

$$L(A/B) = \frac{L(A \cap B)}{L(B)} = \frac{\text{احتمال تقاطعهم}}{\text{احتمال الحدث الثاني}} \quad \leftarrow$$

$$L(A/B) = \frac{L(A \cap B)}{L(A)} \quad \leftarrow$$

لاحظ أن: $L(A/B) \neq L(B/A)$

$$L(\bar{A}/B) = 1 - L(A/B) \quad \leftarrow$$

$$\frac{(A \cap B) - (A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) : \text{الإثبات}$$

$$P(A|B) - 1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - 1 =$$

$$\frac{(A \cap B) - (A \cap \bar{B})}{P(A) - 1} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(A) - 1} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) \Leftarrow$$

$$\frac{(A \cup B) - 1}{P(A) - 1} = \frac{P(A \cup B) - 1}{P(A) - 1} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) \Leftarrow$$

١٥ الأحداث المستقلة :

الحدثان المستقلان يكون الحدثان مستقلان إذا كان وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في وقوع الحدث الآخر .

⇐ إذا كان : A, B حدثين مستقلين ، فإن : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

يكون : A, B حدثين غير مستقلين إذا كان :

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

الأحداث غير المستقلة

أمثلة

الأحداث غير المستقلة	الأحداث المستقلة
سُحبت كرة عشوائياً من كيس دون إعادتها ثم سُحبت كرة ثانية .	سُحبت كرة عشوائياً من كيس ثم أعيدت إلى الكيس ، ثم سُحبت كرة ثانية .

ملاحظات : إذا كان : A, B حدثين مستقلين .

$$(1) \text{ فإن : } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$(2) \text{ فإن : } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$(3) \text{ فإن : } \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(B|A)}$$

وجه المقارنة	الحدثان المستقلان	الحدثان المتنافيان
التعريف	• حدثان لا يؤثر أحدهما على احتمال وقوع الآخر. • حدث ممكن. • لا يوجد تأثير.	• حدثان لا يمكن وقوعهما في نفس الوقت. • حدث مستحيل. • لا يوجد احتمال.
القاعدة	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	$P(A \cap B) = 0$
أمثلة : (١) قطعة نقود	رمى قطعة النقود مرتين : الرمية الأولى : صورة الرمية الثانية : كتابة	رمى قطعة النقود مرة واحدة : ظهور صورة وكتابة في نفس الرمية مستحيل.
(٢) حجر نرد	رمى حجر نرد وقطعة نقود ظهور العدد ٤ والعملة كتابة .	رمى حجر نرد فظهر الرقم ٣ والرقم ٥ في نفس الرمية مستحيل.
(٣) اختيار طالب من الصف	الطالب من الأول ومن الطلاب المتفوقين .	أن يكون الطالب المختار ولد وبنت في نفس الوقت.

١٦ المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية :

المتغير العشوائى	إذا كان (ف) فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، (ح) مجموعة الأعداد الحقيقية فإن أى دالة سـ : (ف) ← (ح) تسمى متغيراً عشوائياً مُعرف على (ف)
مدى المتغير العشوائى	مجموعة جزئية من (ح)
المتغير العشوائى المتقطع	هو المتغير العشوائى الذى مداه مجموعة منتهية .

٥ التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى (المتقطع) :

سـ	سـ _١	سـ _٢		سـ _ن
$P(S_1)$	$P(S_2)$	$P(S_3)$		$P(S_n)$

وهذه دالة تحقق الشرطين :

$$(1) P(S) < 0 \text{ لكل } S = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$(2) P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

← لاحظ أن أى دالة تحقق الشرطين تصلح أن تكون دالة توزيع احتمالى لمتغير عشوائى متقطع .

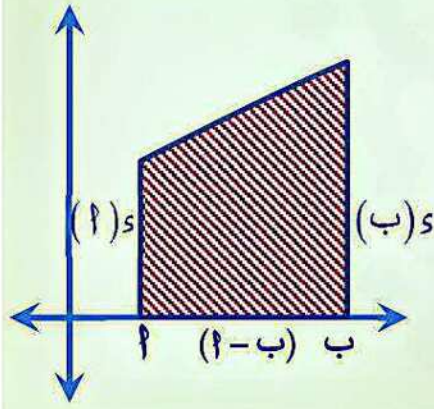
التوقع (المتوسط)	التباين (σ^2)	معامل الاختلاف
$\sum_{r=1}^n (s_r) = \mu$	$\sum_{r=1}^n (s_r)^2 = \sigma^2 + \mu^2$	$\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100\% = \text{معامل الاختلاف}$
مجموع حواصل ضرب : $(s_r) \times (s_r)$	الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{\sigma^2}$	

١٧ التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين .

التوزيع الاحتمالي الهندسي	التوزيع ذي الحدين	
الرمز	$[s \sim \text{هندسي} (E)]$	$[s \sim \text{حدين} (n, E)]$ حيث n عدد المحاولات و E احتمال النجاح .
عدد المحاولات	(غير محدد) يستمر حتى أول نجاح يكون عدد المحاولات معروف .	ثابت ومعروف (n)
متى تتوقف المحاولات	عند أول نجاح .	بعد عدد محدد من المحاولات (n)
دالة التوزيع	$L(s = r) = E(1 - E)^{r-1}$ حيث $r = 1, 2, 3, \dots$	$L(s = r) = E^n (1 - E)^{n-r}$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$
المتوسط القيمة المتوقعة	$(\mu) = \frac{1}{E}$	$(\mu) = E \times n$
التباين	$\sigma^2 = \frac{1 - E}{E^2}$	$(\sigma^2) = E \times n \times (1 - E)$ $(\sigma) = \sqrt{E \times n \times (1 - E)}$
الاستخدام	عندما نريد معرفة عدد المحاولات حتى أول نجاح .	عندما نريد حساب عدد النجاحات في عدد معين من المحاولات .
مثال :	إذا كان احتمال فوز أحد الفرق الرياضية في أي مباراة ٠,٦ فاحتمال أن يفوز لأول مرة في المباراة الرابعة	إذا كان احتمال فوز أحد الفرق الرياضية في أي مباراة ٠,٦ فاحتمال أن يفوز ثلاث مرات في أول ٤ مباريات

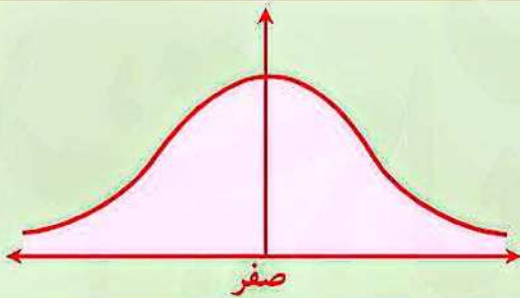
١٨ المتغير العشوائى المتصل :

(١)	المدى	فترة : (١) مفتوحة أو (٢) معلقة .
(٢)	شروط دالة كثافة الاحتمال	(١) $s(س) \leq 0$ (ب) مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة (s) وفوق محور السينات = ١ (ج) دالة الكثافة عبارة عن دالة ثابت أو خطية .
(٣)		المعنى : مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى وفوق محور السينات فى الفترة [١ ، ب] حيث $١ < ب$ $ل(١ \leq س \leq ب) = ل(١ < س < ب) = ل(١ \leq س < ب) = ل(١ < س \leq ب)$ $(١ - ب) \left(\frac{(ب)s + (١)s}{٢} \right) =$ $(١ - ب) \left[\frac{(ب)s + (١)s}{٢} \right] =$



١٩ المتغير العشوائى الطبيعى : هو متغير عشوائى متصل .

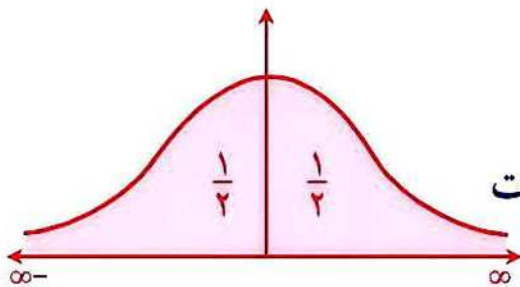
(١)	المدى	الفترة : $]-\infty, \infty[$
(٢)	دالة كثافة الاحتمال	على شكل جرس نعتمد على قيمتين هما : ① المتوسط μ ② الانحراف المعياري σ



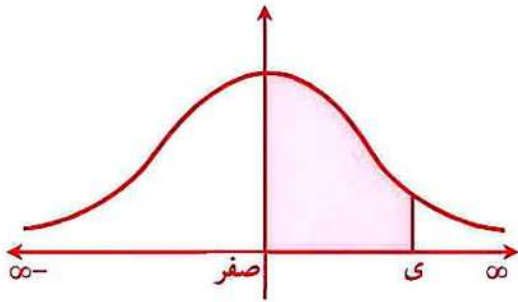
٢٠ التوزيع الطبيعى المعيارى .

هو توزيع طبيعى : متوسطه $\mu = ٠$ ، وانحراف المعيارى $\sigma = ١$

❖ خواص منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى :



- المساحة فوق محور السينات وتحت المنحنى = ١
- المنحنى متماثل بالنسبة للمحور الرأسى (س = ٠) الذى يقسم المنطقة تحت المنحنى وفوق محور السينات إلى منطقتين متماثلتين ومساحة كلاً منها $\frac{١}{٢}$



٣ مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى

وفوق الفترة $[0, y]$ تمثل عددياً احتمال

وقوع المتغير العشوائى ص فى الفترة $[0, y]$

ل $(0 \leq \text{ص} \leq y) =$ المساحة تحت المنحنى

الطبيعى المعيارى وفوق الفترة $[0, y]$ ويكشف عنها مباشرة فى الجدول .

٤ ل $(\text{ص} \leq 0) =$ ل $(\text{ص} \geq 0) = \frac{1}{2}$

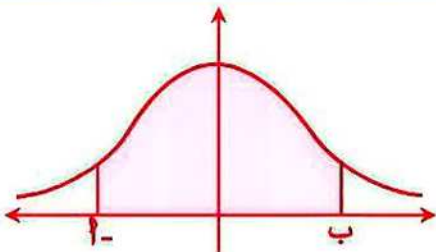
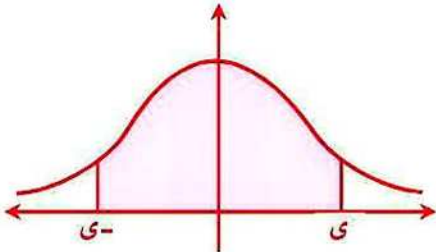
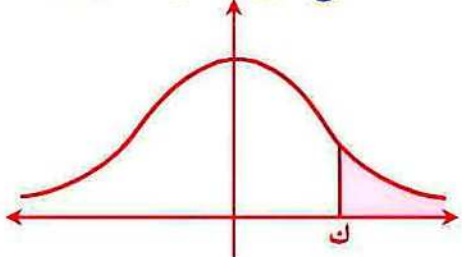
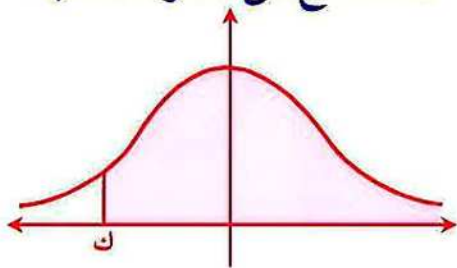
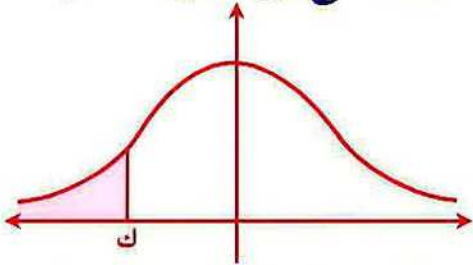
٥ إذا كان : ل $(\text{ص} < y) = 0,4013$ أقل من $\frac{1}{2}$.: ي موجبة

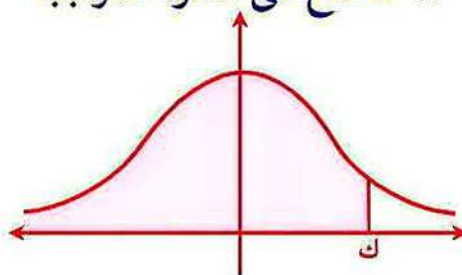
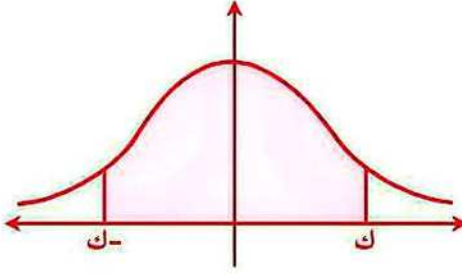
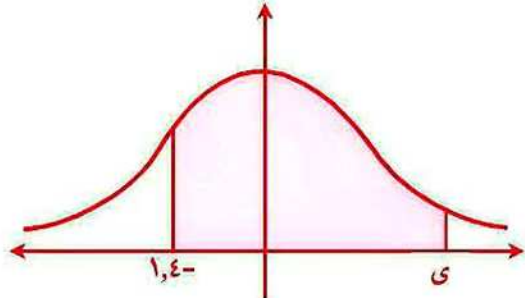
٦ إذا كان : ل $(\text{ص} < y) = 0,9988$ أكبر من $\frac{1}{2}$.: ي سالبة

٧ قواعد استخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

حيث ي ، ١ ، ب أعداد موجبة ١ > ب

جدول المساحات	الرسمه	الاحتمال المطلوب
يكشف فى الجدول مباشرة ي : البداية (الصف) القراءة (العمود)		١ ل $(0 \leq \text{ص} \leq y)$ أو : ل $(-y \leq \text{ص} \leq 0)$
$0,5 + \text{ل} (0 \leq \text{ص} \leq y)$		٢ ل $(\text{ص} \geq y)$ أو : ل $(\text{ص} \leq -y)$
$0,5 - \text{ل} (0 \leq \text{ص} \leq y)$		٣ ل $(\text{ص} \leq y)$ أو : ل $(\text{ص} \geq -y)$
ل $(0 \leq \text{ص} \leq \text{ب})$ - ل $(0 \leq \text{ص} \leq ١)$		٤ ل $(١ \leq \text{ص} \leq \text{ب})$ أو : ل $(\text{ب} - \text{ص} \geq ١ - \text{ص})$

جدول المساحات	الرسمه	الاحتمال المطلوب	
$L(0 \leq V \leq 1)$ $+ L(0 \leq V \leq B)$		$L(-1 \leq V \leq B)$	٥
$2 \times L(0 \leq V \leq Y)$		$L(V \leq Y)$ $= L(-Y \leq V \leq Y)$	٦
$0,5 - L(0 \leq V \leq K)$ $= 0,1980$ $L(0 \leq V \leq K)$ $= 0,3020$ $\therefore K$ من الجدول $\therefore K = 0,85$	$\therefore$ المساحة $> \frac{1}{4}$ ، علامة التباين أكبر $\therefore K$ تقع في الفترة الموجبة 	$L(V \leq K)$ $= 0,1980$	٧
$0,5 + L(0 \leq V \leq K)$ $= 0,9808$ $L(0 \leq V \leq K)$ $= 0,4808$ $\therefore K$ من الجدول $\therefore K = 2,07$	$\therefore$ المساحة $< \frac{1}{4}$ ، علامة التباين أكبر $\therefore K$ تقع في الفترة السالبة 	$L(V \leq K)$ $= 0,9808$	٨
$0,5 - L(0 \leq V \leq K)$ $= 0,33$ $L(0 \leq V \leq K)$ $= 0,17$ $\therefore K$ من الجدول $\therefore K = -0,44$	$\therefore$ المساحة $> \frac{1}{4}$ ، علامة التباين أصغر $\therefore K$ تقع في الفترة السالبة 	$L(V \geq K) = 0,33$	٩

جدول المساحات	الرسمه	الاحتمال المطلوب
$0,5 + ل (ص \geq 0) = 0,9664$ $ل (ص \geq 0) = 0,4664$ $\therefore ك من الجدول = 1,83$	$\therefore$ المساحة $< \frac{1}{4}$ ، علامة التباين أصغر $\therefore ك$ تقع في الفترة الموجبة 	$ل (ص \geq ك) = 0,9664$
$ل \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0,9944$ $\therefore ل (ص \geq 0) = 0,4972$ $\therefore ك = 2,77$		$ل (-ك \leq ص \leq ك) = 0,9944$ أو : $ل (ص \geq ك) = 0,4972$
$ل (ص \geq 0) = 0,7270$ $ل (ص \geq 0) + 0,7270 = 0,4192$ $ل (ص \geq 0) = 0,3087$ $\therefore ك = 0,87$		$ل (-1,4 \leq ص \leq ك) = 0,7270$

١٦ حساب الاحتمال المتغير طبيعي غير معياري .

إذا كان (س) متغيراً طبيعياً غير معياري متوسطه μ ، وانحرافه المعياري σ

فإننا نحول هذا المتغير إلى متغير طبيعي (ص) بالقاعدة : $ص = \frac{\mu - س}{\sigma}$

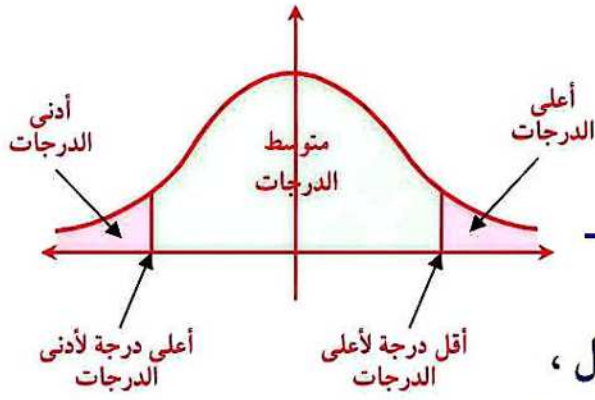
$$ل (أ \geq س \geq ب) = ل \left(\frac{\mu - أ}{\sigma} \geq ص \geq \frac{\mu - ب}{\sigma} \right)$$

إذا كانت درجات الطلاب في إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ ، وانحرافه المعياري σ

(١) النسبة المئوية للطلاب = (الاحتمال $\times 100$) %

(٢) عدد هؤلاء الطلاب = الاحتمال $\times$ العدد الكلي .

(٣) الدرجة المعيارية = $\frac{\text{الدرجة الحقيقية} - \text{المتوسط } \mu}{\text{الانحراف المعياري } \sigma}$



لإيجاد الحد الأدنى لأعلى الدرجات ،
الحد الأعلى لأدنى الدرجات
يجب تذكر الرسم المقابل جيداً .

١٢ التقدير الإحصائي وفترات الثقة :

في الإحصاء ، عندما لا نستطيع دراسة المجتمع بالكامل ،
نأخذ عينة منه ، ونحسب منها بعض القيم مثل المتوسط الحسابي .
نستخدم هذه القيم لتقدير معالم المجتمع ككل .. وهذا ما يسمى (التقدير الإحصائي) .



في الجدول التالي أهم المصطلحات .. ومثال يساعد على الفهم :

المصطلح	التعريف المبسط	مثال تطبيقي
المجتمع الإحصائي	كل المفردات أو العناصر التي ندرسها سواء كانت أشخاص أو أشياء أو بيانات .	كل طلاب ٣ ثانوي أدنى على مستوى الجمهورية .
العينة	جزء صغير من المجتمع نختاره لندرسه بدلاً من المجتمع كله .	٢٠٠ طالب من مدارس مختلفة في المحافظات .
المعلمة	هو رقم يمثل خاصية في المجتمع كله وغالباً لا نعرفه بدقة .	متوسط درجات طلاب مصر في الإحصاء .
الإحصاء	رقم نحسبه من العينة يساعدنا في الاقتراب من معرفة المعلمة .	متوسط درجات ٢٠٠ طالب .
التقدير بنقطة	تقدير المعلمة برقم واحد .	نحسب متوسط الدرجات = ٧٢
التقدير بفترة	القيمة الحقيقية بين رقمين .	المتوسط بين ٧٠ و ٧٤
مستوى الثقة	نسبة ثقتي أن القيمة فعلاً في الفترة . إذا تكررت التجربة ١٠٠ مرة ، في ٩٥ مرة من ١٠٠ ، المتوسط الحقيقي سيقع داخل هذه الفترة .	واثق بنسبة ٩٥% أن المتوسط بين ٧٠ و ٧٤ .

١٣ الخطأ في التقدير الإحصائي :

عند استخدام عينة لتقدير متوسط المجتمع يكون هناك دائماً فرق بسيط بين متوسط العينة ($\bar{S}$) ومتوسط المجتمع (μ) وهذا الفرق يسمى الخطأ في التقدير ($ه$) هامش الخطأ .

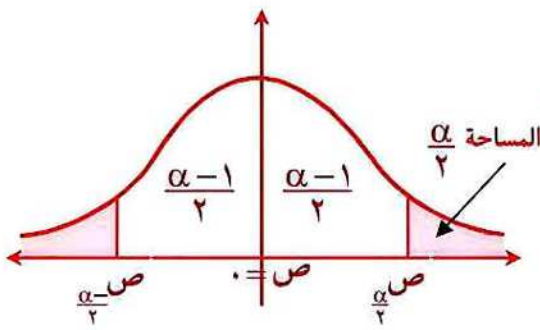
ونوجد الخطأ في التقدير بالقانون الآتي : $ه = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times ص_{\frac{\alpha}{2}}$

حيث : ($ه$) الخطأ في التقدير : الفرق المحتمل بين $\bar{S}$ ، μ و (n) حجم العينة .
(σ) هو الانحراف المعياري للمجتمع ، ($ص_{\frac{\alpha}{2}}$) القيمة الحرجة .

🍏 **مستوى الثقة والقيمة الحرجة :** حيث (α) نسبة الخطأ في التقدير .

إذا كانت : $\alpha = 0,05$ ، فإن : مستوى الثقة = $1 - \alpha = 0,95 = 95\%$

• القيمة الحرجة ($ص_{\frac{\alpha}{2}}$) المناظرة لمستوى ثقة 95%



$\therefore 0,95 = 1 - \alpha \therefore 0,95 = \frac{1 - \alpha}{2} \therefore 0,475 = \frac{\alpha}{2}$

أي أن : ل ($ص > ص_{\frac{\alpha}{2}}$) $0,475 = \frac{\alpha}{2}$ ،

$\therefore ص_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

🍏 **جدول مستوى الثقة والقيمة الحرجة :**

القيمة الحرجة	مستوى الثقة
1,645	90%
1,96	95%
2,576	99%

وكلما (زاد) مستوى الثقة ، (زادت) القيمة الحرجة ، (زادت) فترة الثقة .

١٥ خطوات إيجاد فترة الثقة :

• الخطوة (١) : نوجد القيمة الحرجة α ص المناظرة للدرجة ٩٥ % وهي ١,٩٦

• الخطوة (٢) : نوجد الخطأ في التقدير : $ه = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times ١,٩٦$

• الخطوة (٣) : نوجد فترة الثقة : $\bar{س} \pm ه$ أو $[\bar{س} - ه , \bar{س} + ه]$
الحد الأدنى للفترة الحد الأعلى للفترة

ملاحظات :

(١) إذا كان حجم العينة كبيراً (أكبر من ٣٠) والانحراف المعياري للمجتمع (σ) غير معلوم ، يمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة كبديل مناسب ، لأن القيم الإحصائية للعينة تقترب كثيراً من قيم المجتمع نتيجة لقانون الأعداد الكبيرة ومن خلال التجارب والدراسات .

(٢) الوسط الحسابي للعينة ($\bar{س}$) = $\frac{\text{مجموع الحدين}}{٢}$ أو : $\frac{١}{٢}$ (مجموع الحدين)

حيث : $\bar{س} - ه$ الحد الأدنى ، $\bar{س} + ه$ الحد الأعلى

(٣) الخطأ في التقدير ($ه$) = $\frac{\text{الفرق بين الحدين}}{٢}$ أو : $\frac{\text{الحد الأعلى} - \text{الحد الأدنى}}{٢}$

مثال (١) : إذا كانت فترة الثقة هي $[١ , ٢]$ ،

فإن : (١) الخطأ في التقدير = $\frac{١}{٢} (٢ - ١)$

(٢) الوسط الحسابي للعينة = $\frac{١}{٢} (٢ + ١)$

مثال (٢) : إذا كانت فترة الثقة هي $[٧٣ , ٨٧]$ ،

فإن : $\bar{س} = \frac{٨٧ + ٧٣}{٢} = ٨٠$ ، $ه = \frac{٧٣ - ٨٧}{٢} = ٧$

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي



امسح الباركود بالمويل لتثبيت
التطبيق وتحميل كل الملازم مجاناً وبسرعة



حمل التطبيق الآن



كورسات ونتائج امتحانات



ملازم ثانوي



ملازم اعدادي



ملازم ابتدائي



موقع الدكتور محمد رزق
Dr. Mo. RIZK



D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي